

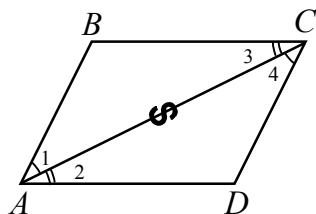
Параллелограмм. Определение, свойства

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм является выпуклым четырехугольником.

Свойство сторон и углов параллелограмма

Теорема. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказать: $AB = CD$, $AD = BC$,
 $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

Доказательство

В параллелограмме $ABCD$ проведём диагональ AC .

Рассмотрим получившиеся треугольники ABC и CDA :

- а) $\angle 1 = \angle 4$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC ;
- б) $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AC ;
- в) AC – общая сторона.

Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по II признаку равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AB = CD$, $AD = BC$, $\angle B = \angle D$.

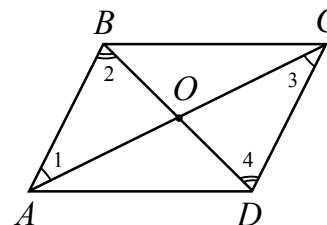
Противоположные углы параллелограмма A и C также равны, т.к. они представляют собой суммы равных углов: $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$, а т.к. $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$, то $\angle A = \angle C$.

Итак, в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Ч.т.д.

Свойство диагоналей параллелограмма

Теорема. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм
 AC , BD – диагонали,
 $AC \cap BD = O$.

Доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.

Доказательство

Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle COD$:

- а) $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма;
- б) $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC ;
- в) $\angle 2 = \angle 4$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей BD .

Следовательно, $\triangle AOB = \triangle COD$ по II признаку равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AO = OC$, $BO = OD$.

Итак, диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Ч.т.д.